上海财经大学 外国留学生本科入学文化考试
数学（样题） 答案及评分标准

一、选择题（每题 4 分，共 40 分）

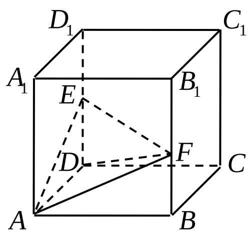
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	D	B	C	D	A	B	C	C

二、填空题（每题 5 分，共 30 分）

11. $2\sqrt{2}$　　12. $x+y-3=0$　　13. $\frac{1}{15}$

14. $6\sqrt{2}$　　15. $\frac{5\pi}{12}$　　16. $2^{1011}-3$

三、解答题（本大题共有 4 题，满分 50 分）



17. （1）因为$C_1D_1 // AB$，所以$\angle FAB$为异面直线AF与C_1D_1所成的角.（2 分）

在直角$\triangle ABF$中，$\tan\angle FAB=\frac{BF}{AB}=\frac{1}{3}$，（2 分）

故异面直线AF与C_1D_1所成的角的大小为$\arctan\frac{1}{3}$.（2 分）

（2）$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot DE=9$，点$F$到平面$ADE$的距离$h=6$，（4 分）

所以四面体$F-ADE$的体积$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ADE}\cdot h=18$.（2 分）

18. （1）$f(x)$为奇函数.（2 分）

由$\frac{1+x}{1-x}>0$，得$x\in(-1,1)$.

对任意$x\in(-1,1)$，$f(-x)=\log_2\frac{1-x}{1+x}=\log_2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\log_2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$，

所以$f(x)$为奇函数.（4 分）

（2）$f(x)$存在反函数.（2 分）

（方法一）对任意 $x_1, x_2 \in (-1,1)$，且 $x_1 < x_2$，

因为 $\frac{1+x_1}{1-x_1} - \frac{1+x_2}{1-x_2} = \frac{2(x_1-x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)} < 0$，即 $\frac{1+x_1}{1-x_1} < \frac{1+x_2}{1-x_2}$，又 $y = \log_2 x$ 为增函数，所以 $f(x_1) < f(x_2)$，即 $f(x)$ 为增函数，因此 $f(x)$ 存在反函数.（4 分）

（方法二）设 $y = \log_2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$，则 $\frac{1+x}{1-x} = 2^y$，得 $x = \frac{2^y-1}{2^y+1}$，即对 $f(x)$ 值域中的每一个 y 值，都有唯一确定的 x 值与其对应，所以 $f(x)$ 存在反函数.

19.（1）由 $a_{n+3} = a_n$ 知 $a_4 = a_1$，$a_6 = a_3$，（2 分）

又 $a_1 = 1$，所以由已知可得 $\begin{cases} 2a_2 + a_3 = 12, \\ a_2 + a_3 = 9, \end{cases}$

解得 $a_2 = 3$，$a_3 = 6$.（4 分）

（2）设 $\{S_n\}$ 的公差为 d，则 $n \ge 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = d$，（2 分）

而 $a_4 = a_1 = 1$，所以 $d = 1$.（2 分）

此时符合条件，故 $a_n = 1$.（2 分）

20.（1）根据题意，$F(-1,0)$.

由 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1, \end{cases}$（3 分）

解得 $\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 3. \end{cases}$ 所以 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.（3 分）

（2）设 $Q(x,y)$. 由 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$，得 $y^2 = 3 - \frac{3}{4}x^2$.

$|OQ|^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}x^2 + 3$，$|FQ|^2 = (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$.（2 分）

$\lambda^2 = \frac{|OQ|^2}{|FQ|^2} = \frac{x^2+12}{x^2+8x+16} = \frac{(x+4)^2 - 8(x+4) + 28}{(x+4)^2} = 28\left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{7}\right)^2 + \frac{3}{7}$，（2 分）

因为 $-2 \le x \le 2$，所以 $\frac{1}{6} \le \frac{1}{x+4} \le \frac{1}{2}$，而函数 $y = 28\left(t - \frac{1}{7}\right)^2 + \frac{3}{7}$ 在 $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$ 上递增，从而 λ^2 的取值范围为 $\left[\frac{4}{9}, 4\right]$，故 λ 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$.（4 分）